

Table S.1: Empirical size of the tests with AR(2) errors: $u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim i.i.d.N\left(0, \frac{(1+\phi_2)\{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\}}{1-\phi_2}\right)$ with $\phi_2 = -0.3$

		$\phi_1 = 0.3$	$\phi_1 = 0.5$	$\phi_1 = 0.7$	$\phi_1 = 0.9$	$\phi_1 = 1.1$
$T = 100$	$CUSUM_{H_0}$	0.010	0.014	0.015	0.007	0.006
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.018	0.041	0.073	0.117	0.256
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.013	0.024	0.037	0.044	0.075
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.011	0.017	0.024	0.017	0.014
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.043	0.096	0.155	0.253	0.578
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.036	0.070	0.106	0.162	0.404
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.032	0.060	0.087	0.132	0.353
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.021	0.049	0.086	0.143	0.361
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.016	0.030	0.047	0.068	0.176
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.013	0.022	0.035	0.036	0.087
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.019	0.043	0.075	0.119	0.285
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.013	0.025	0.038	0.050	0.102
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.011	0.017	0.025	0.019	0.024
$T = 200$	$CUSUM_{H_0}$	0.019	0.026	0.027	0.020	0.005
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.026	0.049	0.068	0.093	0.176
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.022	0.039	0.043	0.052	0.073
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.021	0.032	0.035	0.035	0.028
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.048	0.083	0.116	0.171	0.399
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.042	0.069	0.089	0.126	0.291
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.038	0.061	0.077	0.108	0.245
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.030	0.054	0.074	0.108	0.233
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.025	0.042	0.050	0.065	0.130
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.023	0.036	0.041	0.046	0.076
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.026	0.049	0.068	0.095	0.189
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.023	0.039	0.044	0.055	0.084
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.021	0.032	0.036	0.036	0.040
$T = 300$	$CUSUM_{H_0}$	0.018	0.025	0.023	0.020	0.014
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.025	0.041	0.056	0.075	0.123
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.023	0.034	0.041	0.045	0.068
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.021	0.030	0.031	0.031	0.034
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.042	0.070	0.096	0.144	0.325
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.040	0.057	0.074	0.107	0.230
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.036	0.053	0.068	0.088	0.193
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.026	0.042	0.060	0.086	0.169
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.024	0.035	0.045	0.056	0.094
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.022	0.032	0.035	0.038	0.065
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.025	0.041	0.057	0.076	0.132
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.023	0.034	0.041	0.046	0.072
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.021	0.030	0.031	0.032	0.040

Table S.1 (continued)

		$\phi_1 = 0.3$	$\phi_1 = 0.5$	$\phi_1 = 0.7$	$\phi_1 = 0.9$	$\phi_1 = 1.1$
$T = 500$	$CUSUM_{H_0}$	0.030	0.035	0.036	0.032	0.025
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.035	0.044	0.055	0.071	0.100
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.033	0.040	0.047	0.056	0.061
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.032	0.038	0.043	0.044	0.050
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.044	0.061	0.079	0.117	0.238
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.042	0.053	0.068	0.098	0.182
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.040	0.052	0.062	0.085	0.155
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.036	0.046	0.056	0.077	0.129
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.033	0.041	0.050	0.060	0.084
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.032	0.040	0.044	0.048	0.063
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.035	0.044	0.055	0.071	0.104
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.033	0.041	0.047	0.056	0.064
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.032	0.038	0.043	0.045	0.051
$T = 1000$	$CUSUM_{H_0}$	0.030	0.038	0.038	0.036	0.031
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.034	0.046	0.050	0.059	0.085
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.032	0.041	0.044	0.049	0.060
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.031	0.041	0.042	0.045	0.050
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.040	0.058	0.072	0.091	0.170
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.039	0.050	0.059	0.075	0.136
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.036	0.048	0.055	0.068	0.126
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.035	0.046	0.051	0.060	0.100
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.032	0.042	0.045	0.050	0.071
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.032	0.041	0.043	0.046	0.060
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.034	0.046	0.050	0.059	0.087
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.032	0.041	0.044	0.049	0.060
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.031	0.041	0.042	0.045	0.050

Table S.2: Empirical size of the tests with AR(2) errors: $u_t = \phi_1 u_{t-1} + \phi_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim i.i.d.N\left(0, \frac{(1+\phi_2)\{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2\}}{1-\phi_2}\right)$ with $\phi_2 = 0.3$

		$\phi_1 = -0.3$	$\phi_1 = -0.1$	$\phi_1 = 0.1$	$\phi_1 = 0.3$	$\phi_1 = 0.5$
$T = 100$	$CUSUM_{H_0}$	0.068	0.116	0.141	0.077	0.025
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.110	0.155	0.219	0.212	0.289
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.088	0.133	0.171	0.137	0.128
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.077	0.125	0.154	0.110	0.058
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.186	0.257	0.350	0.395	0.599
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.162	0.231	0.294	0.302	0.461
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.157	0.225	0.280	0.276	0.429
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.127	0.167	0.245	0.255	0.394
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.101	0.146	0.194	0.172	0.240
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.089	0.139	0.177	0.143	0.181
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.111	0.156	0.223	0.221	0.319
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.090	0.135	0.173	0.142	0.162
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.079	0.128	0.157	0.114	0.085
$T = 200$	$CUSUM_{H_0}$	0.079	0.138	0.165	0.094	0.041
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.105	0.158	0.215	0.180	0.227
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.093	0.148	0.194	0.132	0.130
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.085	0.141	0.178	0.113	0.077
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.160	0.226	0.299	0.303	0.506
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.146	0.213	0.269	0.247	0.407
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.138	0.207	0.258	0.227	0.383
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.111	0.164	0.223	0.198	0.304
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.096	0.153	0.203	0.154	0.198
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.091	0.147	0.192	0.132	0.161
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.106	0.158	0.216	0.182	0.239
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.093	0.148	0.194	0.135	0.149
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.085	0.141	0.181	0.115	0.092
$T = 300$	$CUSUM_{H_0}$	0.072	0.136	0.158	0.090	0.054
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.091	0.148	0.203	0.151	0.182
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.082	0.142	0.173	0.121	0.111
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.078	0.142	0.164	0.106	0.077
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.135	0.197	0.270	0.241	0.440
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.122	0.188	0.243	0.205	0.350
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.118	0.186	0.232	0.189	0.312
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.097	0.152	0.210	0.167	0.250
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.086	0.145	0.181	0.132	0.163
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.082	0.144	0.171	0.121	0.134
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.092	0.148	0.203	0.154	0.195
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.082	0.142	0.174	0.122	0.123
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.078	0.142	0.164	0.108	0.090

Table S.2 (continued)

		$\phi_1 = -0.3$	$\phi_1 = -0.1$	$\phi_1 = 0.1$	$\phi_1 = 0.3$	$\phi_1 = 0.5$
$T = 500$	$CUSUM_{H_0}$	0.072	0.124	0.158	0.095	0.072
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.084	0.134	0.187	0.136	0.154
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.079	0.128	0.173	0.113	0.113
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.075	0.127	0.168	0.103	0.094
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.116	0.170	0.235	0.204	0.340
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.113	0.162	0.218	0.180	0.286
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.109	0.161	0.213	0.173	0.268
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.086	0.137	0.192	0.141	0.188
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.080	0.131	0.177	0.122	0.149
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.077	0.129	0.170	0.110	0.131
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.084	0.134	0.188	0.136	0.160
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.079	0.128	0.174	0.114	0.119
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.075	0.127	0.168	0.104	0.099
$T = 1000$	$CUSUM_{H_0}$	0.074	0.121	0.145	0.095	0.078
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.084	0.126	0.158	0.115	0.130
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.080	0.124	0.151	0.104	0.105
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.078	0.122	0.148	0.100	0.092
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.098	0.144	0.181	0.157	0.250
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.095	0.141	0.170	0.140	0.217
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.092	0.139	0.168	0.136	0.212
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.084	0.126	0.161	0.117	0.141
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.081	0.125	0.153	0.106	0.126
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.079	0.123	0.150	0.103	0.115
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.084	0.126	0.158	0.115	0.131
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.080	0.124	0.151	0.104	0.108
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.078	0.122	0.148	0.100	0.094

Table S.3: Empirical size of the tests with MA(1) errors: $u_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ with $\varepsilon_t \sim i.i.d.N\left(0, \frac{1}{1+\theta}\right)$

		$\theta = -0.8$	$\theta = -0.4$	$\theta = 0$	$\theta = 0.4$	$\theta = 0.8$
$T = 100$	$CUSUM_{H_0}$	0.000	0.006	0.028	0.023	0.020
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.000	0.014	0.047	0.067	0.083
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.000	0.008	0.034	0.041	0.043
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.000	0.006	0.031	0.030	0.031
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.000	0.031	0.098	0.139	0.166
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.000	0.024	0.082	0.104	0.118
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.000	0.020	0.077	0.094	0.102
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.000	0.016	0.057	0.079	0.097
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.000	0.010	0.040	0.054	0.060
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.000	0.008	0.035	0.041	0.040
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.000	0.014	0.048	0.068	0.085
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.000	0.008	0.034	0.042	0.046
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.000	0.006	0.031	0.031	0.031
$T = 200$	$CUSUM_{H_0}$	0.000	0.013	0.038	0.038	0.034
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.000	0.017	0.046	0.061	0.067
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.000	0.016	0.042	0.050	0.052
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.000	0.014	0.041	0.043	0.041
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.000	0.028	0.077	0.103	0.119
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.000	0.026	0.070	0.090	0.094
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.000	0.023	0.068	0.080	0.084
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.000	0.018	0.049	0.066	0.077
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.000	0.016	0.044	0.053	0.056
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.000	0.015	0.041	0.045	0.044
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.000	0.017	0.046	0.061	0.068
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.000	0.016	0.042	0.050	0.052
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.000	0.014	0.041	0.043	0.042
$T = 300$	$CUSUM_{H_0}$	0.000	0.013	0.042	0.038	0.035
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.000	0.018	0.047	0.062	0.064
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.000	0.015	0.046	0.050	0.052
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.000	0.014	0.045	0.047	0.044
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.000	0.030	0.067	0.089	0.097
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.000	0.026	0.064	0.078	0.082
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.000	0.023	0.062	0.074	0.074
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.000	0.019	0.050	0.066	0.070
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.000	0.017	0.047	0.052	0.055
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.000	0.014	0.046	0.049	0.047
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.000	0.018	0.047	0.063	0.065
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.000	0.015	0.046	0.050	0.052
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.000	0.014	0.045	0.047	0.044

Table S.3 (continued)

		$\theta = -0.8$	$\theta = -0.4$	$\theta = 0$	$\theta = 0.4$	$\theta = 0.8$
$T = 500$	$CUSUM_{H_0}$	0.000	0.021	0.047	0.050	0.046
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.000	0.025	0.051	0.063	0.066
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.000	0.023	0.049	0.058	0.059
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.000	0.022	0.047	0.055	0.053
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.000	0.032	0.066	0.080	0.090
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.000	0.030	0.065	0.075	0.076
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.000	0.028	0.063	0.072	0.072
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.000	0.025	0.052	0.065	0.067
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.000	0.023	0.050	0.060	0.060
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.000	0.023	0.049	0.056	0.057
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.000	0.025	0.051	0.063	0.066
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.000	0.023	0.049	0.058	0.059
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.000	0.022	0.047	0.055	0.053
$T = 1000$	$CUSUM_{H_0}$	0.000	0.026	0.046	0.048	0.045
	$CUSUM_{JX} (c = 1)$	0.000	0.030	0.047	0.058	0.059
	$CUSUM_{JX} (c = 2)$	0.000	0.029	0.046	0.054	0.053
	$CUSUM_{JX} (c = 3)$	0.000	0.028	0.046	0.052	0.050
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1)$	0.000	0.033	0.058	0.073	0.076
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1)$	0.000	0.032	0.057	0.068	0.069
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1)$	0.000	0.032	0.056	0.065	0.064
	$CUSUM^* (c = 1, d = 1.5)$	0.000	0.030	0.048	0.058	0.059
	$CUSUM^* (c = 2, d = 1.5)$	0.000	0.029	0.046	0.054	0.053
	$CUSUM^* (c = 3, d = 1.5)$	0.000	0.028	0.046	0.053	0.051
	$CUSUM^* (c = 1, d = 2)$	0.000	0.030	0.047	0.058	0.059
	$CUSUM^* (c = 2, d = 2)$	0.000	0.029	0.046	0.054	0.053
	$CUSUM^* (c = 3, d = 2)$	0.000	0.028	0.046	0.052	0.051